Mémo n. 0

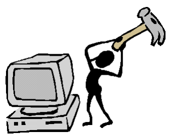
Reprenons les BASES

I32 Preuves et Analyses d'algorithmes

P. Véron

1. Représentation en base b

• Si $(a_j a_{j-1} \dots a_0)$ est la représentation en **base** b de l'entier $N \neq 0$, alors la valeur de N est donnée par



$$N = a_j b^j + a_{j-1} b^{j-1} + \dots + a_0$$

avec $0 \leqslant a_i < b$ et $a_j \neq 0$ (chiffre significatif).

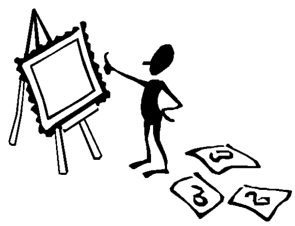
Exemple :

$$\begin{array}{lclcl} (11010)_2 & = & 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 & = & 26 \\ (2324)_5 & = & 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 4 \times 5^0 & = & 339 \end{array}$$

Remarque : $(1763)_8$ et $(001763)_8$ représentent le même entier N de valeur ? ?

• Algorithme de calcul de N à partir de sa décomposition en base b (saisie des a_i au fur et à mesure, arrêt lorsque $a_i = -1$).

```
Algo valeurdeN
données d, a, b, n : entiers
  début
    n ← 0
    d ← 1
    tant que a ≠ −1 faire
              n ← n + a × d
              d ← d × 10
              lire(a)
    fintq
    ecrire(n)
  fin
```



L'algorithme ci-dessus est incomplet. Que manque-t-il ?

2. Décomposition en base b

Soit $N = a_j b^j + a_{j-1} b^{j-1} + \cdots a_1 b + a_0$, on constate que :

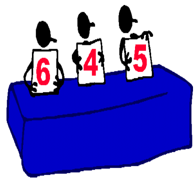
$$\begin{array}{lclcl} & & N \bmod b & = & a_0 \\ N^{(1)} & = & N \text{ div } b & = & a_{j-1} b^{j-1} + \dots + a_1 \\ & & N^{(1)} \bmod b & = & a_1 \\ N^{(2)} & = & N^{(1)} \text{ div } b & = & a_{j-2} b^{j-2} + \dots + a_2 \\ & & N^{(2)} \bmod b & = & a_2 \\ & & \vdots & & \\ & & N^{(j-1)} \bmod b & = & a_{j-1} \\ N^{(j)} & = & N^{(j-1)} \text{ div } b & = & a_j \\ & & N^{(j)} \bmod b & = & a_j \\ N^{(j+1)} & = & N^{(j)} \text{ div } b & = & 0 \end{array}$$

Exemple : $N = 73$, $b = 2$.

$$
\begin{array}{rclcl}
 & & N \text{ mod } 2 & = & 1 \\
N^{(1)} & = & N \text{ div } 2 & = & 36 \\
 & & N^{(1)} \text{ mod } 2 & = & 0 \\
N^{(2)} & = & N^{(1)} \text{ div } 2 & = & 18 \\
 & & N^{(2)} \text{ mod } 2 & = & 0 \\
N^{(3)} & = & N^{(2)} \text{ div } 2 & = & 9 \\
 & & N^{(3)} \text{ mod } 2 & = & 1 \\
N^{(4)} & = & N^{(3)} \text{ div } 2 & = & 4 \\
 & & N^{(4)} \text{ mod } 2 & = & 0 \\
N^{(5)} & = & N^{(4)} \text{ div } 2 & = & 2 \\
 & & N^{(5)} \text{ mod } 2 & = & 0 \\
N^{(6)} & = & N^{(5)} \text{ div } 2 & = & 1 \\
 & & N^{(6)} \text{ mod } 2 & = & 1 \\
N^{(7)} & = & N^{(6)} \text{ div } 2 & = & 0
\end{array}
$$

La représentation en base 2 de 73 est donc (1001001). D'où l'algorithme suivant qui calcule chaque symbole de la décomposition en base b d'un entier $N \neq 0$.

Algo decompose
donnees a, b, n : *entiers*
  début
    lire(n)
    lire(b)
    tant que $n \neq 0$ **faire**
        $a \leftarrow n \text{ mod } b$
        ecrire(a)
        $n \leftarrow \lfloor n/b \rfloor$
    fintq
  fin



3. Multiplication par b

$$
\begin{array}{llcccccccll}
\text{Soit} & N & = & & a_j & a_{j-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & j+1 \ \text{symboles} \\
\text{alors} & N \times b & = & a_j & a_{j-1} & a_{j-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & j+2 \ \text{symboles}
\end{array}
$$

Décalage vers la gauche + ajout d'un zéro à droite.

4. Division par b

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\text{Soit} & N & = & a_j & a_{j-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & j+1 \ \text{symboles} \\
\text{alors} & \lfloor N/b \rfloor & = & 0 & a_j & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & j \ \ \ \ \text{symboles}
\end{array}
$$

Décalage vers la droite (+ ajout d'un zéro à gauche).

5. Nombre de symboles nécessaires pour représenter N en base b

Pour $N = 0$, il suffit d'un symbole quelque soit la base. Supposons donc $N \neq 0$. Soit $N = a_j b^j + a_{j-1} b^{j-1} + \dots + a_1 b + a_0$, (N est donc codé sur $j+1$ symboles) on a alors

$$
\begin{array}{rcccl}
b^j & \leqslant & N & < & b^{j+1} \\
\Rightarrow \quad j & \leqslant & \log_b N & < & j+1 \\
\Rightarrow \quad j+1 & = & \lfloor \log_b N \rfloor + 1 & &
\end{array}
$$

L'écriture d'un entier $N \neq 0$ en base b nécessite $\lfloor \log_b N \rfloor + 1$ symboles. C'est la **taille** de N en base b.

6. Application

Soit l'algorithme suivant :

Algo ? ? ?
données n : *entier*
  début
    lire(n)
    tant que $n \neq 0$ **faire**
        $n \leftarrow \lfloor n/b \rfloor$
    fintq
  fin

Question : Combien de fois passe-t-on dans la boucle ?

Soit $(a_j a_{j-1} \dots a_0)$ la représentation en base b de l'entier n. Voici l'évolution de cette décomposition après chaque passage dans la boucle et exécution de l'instruction $n \leftarrow \lfloor n/b \rfloor$.

Initialisation	a_j	a_{j-1}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_0
1erpassage	0	a_j	a_{j-1}	$\cdots$	$\cdots$	a_1
2èmepassage	0	0	a_j	a_{j-1}	$\cdots$	a_2
$\vdots$						
?? passage	0	0	0	$\cdots$	$\cdots$	0

On obtient $n = 0$ lorsque tous les symboles de n ont disparu, or n est codé sur $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$ symboles.

Le nombre de passages dans la boucle est donc de $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$, pour $n \neq 0$.